Teoría de Juegos No Cooperativa

Jorge Oviedo

1ra. Escuela de Modelos Matemáticos de Comportamiento Económico

Merlo, Septiembre de 2005

1 Juegos no cooperativos

Los juegos no cooperativos son a diferencia de los juegos cooperativos juegos donde no se permite la cooperación, es decir que los agentes o jugadores toman sus decisiones en forma independiente sin tener ningún compromiso con los otros jugadores.

Hay dos tipos de juegos no cooperativos:

- Los juegos en forma estratégica o normal, donde los jugadores eligen simultáneamente su estrategia o jugada.
- Los juegos en forma extensiva, donde los jugadores eligen su jugada en forma alternativa.

1.1 Juegos estratégicos o en forma normal

Definición 1 *Un juego en forma estratégica o normal está definido por*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *conjunto de jugadores* *para cada* $i \in N$,
- S_i *el conjunto de estrategias puras y* $S = \prod_{i \in N} S_i$. $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ *denota un perfil de estrategia o simplemente una estrategia*
- $u_i : S \rightarrow \mathbf{R}$, *la función de pago.*

Un Juego en Forma Estratégica o Normal está definido por estos tres elementos.

El *objetivo* de cada jugador es elegir una estrategia que maximice su pago. En algunos casos puede ser que esta elección ayude a los oponentes y en otros los perjudique.

Por ejemplo, para un economista una estrategia, en un modelo de oligopolio, puede significar la elección de precios o niveles de producción , los cuales corresponden a las competencias de Bertrand y Cournot, respectivamente.

Ejemplo 1 *Un* Jueg*o* de dos personas es a suma cero si *para cada* $s \in S$

$$u_1(s) + u_2(s) = 0$$

o

$$u_1(s) = -u_2(s)$$

es decir lo que un jugador gana el otro pierde.

Un juego es finito cuando el conjunto de estrategias puras de cada jugador es finito, en este caso la función de pago se representa por una matriz.

Ejemplo 2 $N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{U, M, D\}$, $S_2 = \{L, R\}$,

	L	R
U	*4,3*	*6,2*
M	*2,1*	$\boxed{\mathbf{3}}$*,6*
D	*3,*$\boxed{\mathbf{0}}$	*2,8*

así tenemos que $u_1(M, R) = 3$ *y* $u_2(D, L) = 0$.

1.1.1 Estrategias mixtas-Pago esperado

Definición 2 *Una estrategia mixta del jugador* i, *es una distribución de probabilidades sobre su conjunto de estrategia puras, es decir*

$$\sum = \left\{ \sigma_i : S_i \to \mathbf{R} : \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \text{ } y \text{ } \forall s_i \in S_i,\ \sigma_i(s_i) \geq 0 \right\}$$

$\sigma_i(s_i)$ denota la probabilidad que le asigna a la estrategia pura s_i,
Sea $\sigma_1 = (\sigma_1(U), \sigma_1(M), \sigma_1(D)) = (\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, 0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.
$\sum_i = \prod_{i \in N} \sum_i$, denota el espacio de estrategias mixtas

$$\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \sum$$

Denotaremos por $u_i(\sigma)$ el pago esperado cuando los jugadores eligen $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$, es decir

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s).$$

Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$,donde $\sigma_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ y $\sigma_2 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$,

$$u_1(\sigma) = \begin{array}{c|c|c|} & 3/4 & 1/4 \\ \cline{2-3} 2/3 & 4 & 6 \\ \cline{2-3} 1/3 & 2 & 3 \\ \cline{2-3} 0 & 3 & 2 \\ \cline{2-3} \end{array} = (2/3, 1/3, 0) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{15}{4}.$$

1.1.2 Función de pago bimatricial. Propiedades

Consideremos un juego de dos personas, donde $|S_1| = n$ y $|S_2| = m$, entonces la función de pago u_i de cada jugador viene dado por dos matrices A y B, ya que si s_1 y s_2 son las $i-$*ésima* y $j-$*ésima* estrategia respectivamente entonces

$$u_1(s_1, s_2) = a_{ij} \text{ y } u_2(s_1, s_2) = b_{ij}.$$

Estos juegos se los denomina bimatriciales y se lo denota por (A, B)

En el caso del juego de dos personas a suma cero, se tiene que $B = -A$, y se lo denomina juego matricial.

El pago esperado para el jugador 1, viene dado por

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{2} \sigma_j(s_j) \right) u_1(s_1, s_2) \\ &= \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} (\sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2)) u_1(s_1, s_2) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_1(i) u_1(i, j) \sigma_2(j) \\ &= \sigma_1 A \sigma_2. \end{aligned}$$

En forma similar, se puede probar que

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 B \sigma_2.$$

Las funciones de pago satisfacen la propiedad de linealidad

$$\begin{aligned} u_1(k\sigma_1 + \sigma_1', \sigma_2) &= (k\sigma_1 + \sigma_1') A\sigma_2 \\ &= k\sigma_1 A\sigma_2 + \sigma_1' A\sigma_2 \\ &= ku_1(\sigma_1, \sigma_2) + u_1(\sigma_1', \sigma_2) \end{aligned}$$

La propiedad de linealidad se puede generalizar para cualquier número de jugadores.

También las funciones de pago de los jugadores son funciones continuas y en general son C^∞

1.1.3 Estrategias Dominadas

	L	R
U	4,3	6,2
M	2,1	3,6
D	3,0	2,-1

El jugador 1 no tiene incentivo jugar la estrategia M, ya que si juega U siempre obtiene un mejor pago. Es decir, la estrategia mixta que elegirá el jugador 1 será del tipo $\sigma_1 = (\sigma_1(U), 0, \sigma_1(D))$,

	L	R
U	4,3	6,2
D	3,0	2,-1

El jugador 2 elegirá $\sigma_2 = (\sigma_2(L), 0) = (1, 0)$

	L
U	4,3
D	3,0

El jugador 1 elegirá $\sigma_1 = (\sigma_1(U), \sigma_1(D)) = (1, 0)$, ésto significa $\sigma_1 = (1, 0, 0)$.

Por lo tanto, el juego reducido es:

	L
U	4,3

El pago que reciben los jugadores por jugar *racionalmente*, es $u_1(\sigma_1, \sigma_2) = 4$ y $u_2(\sigma_1, \sigma_2) = 3$.

Formalmente tenemos:

Definición 3 *Una estrategia pura s_i, es débilmente dominada por el jugador i si existe $\sigma'_i \in \sum_i$ tal que, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$*

$$u_i(\sigma'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}).$$

Ejemplo 3 *La solución de un juego por eliminación de estrategias dominadas no es independiente del orden en el que se eliminan las estrategias débilmente dominadas*

	L	*R*
U	***4,3***	***6,3***
M	*2,1*	*3,2*
D	*1,1*	*1,0*

Si el jugador 1 elimina la estrategia D, entonces el jugador 2 elimina L y el jugador 1 elimina M, por lo tanto la solución que se obtiene por esta iteración es (6,3)

Si el Jugador 1 elimina M, entonces el jugador 2 elimina R, luego el jugador 1 elimina D, la solución que se obtiene por esta iteración es (4,3).

1.1.4 Propiedades

Lema 1 $\sigma_i(s_i) > 0$ y s_i dominada implica σ_i dominada

El siguiente ejemplo muestra que una estrategia mixta puede ser estrictamente dominada aún que asigne probabilidad positiva sólo a estrategias puras que no son débilmente dominadas

Ejemplo 4 *Considerar* $\sigma_1 = (.5, .5, 0)$

	L	R
U	*1,3*	*-2,0*
M	*-2,0*	*1,3*
D	*0,1*	*0,1*
σ_1	$-.5$	$-.5$

1.1.5 La solución del juego

Cuando el proceso de eliminación da una estrategia, ésta debe ser la solución del juego.

El siguiente ejemplo muestra ... problemas de sensibilidad y robusticidad del proceso de eliminación de estrategia estrictamente dominadas

Ejemplo 5 *La eliminación lleva a la solución* (U, L) *, pero el jugador 1 puede jugar la estrategia dominada D si piensa que el jugador 2 puede cometer un pequeño error y jugar R, es decir, D es la mejor elección si el jugador 2 elige* $\sigma_2 = (.9, .1)$

	L	R
U	*8,10*	*-100,9*
D	*7,6*	*6,5*

Ejemplo 6 [*Dilema del Prisionero*] *Hay dos personas arrestadas por un delito. A la policía le falta evidencia suficiente para declararlos culpables, por consiguiente necesita que uno de ellos de testimonio contra el otro. Así la policía le dice a cada sospechoso que si él testifica contra el otro el recibirá un premio. Los sospechosos saben que no hay evidencia suficiente para ir a la cárcel. Si ningún sospechoso testifica, ambos serán liberados porque no hay evidencia suficiente. Si sólo uno testifica, el otro va a prisión mientras que él recibirá un premio. Si ambos testifican, ambos van a prisión y obtienen un premio por testificar.*

- *Si ambos jugadores cooperan entre sí (C) es decir, no testifican obtienen 1 cada uno.*

- *Si ambos no cooperan (D) ,es decir, testifican ellos obtienen 0.*
- *Si uno coopera (C) y el otro no coopera (D), el primero obtiene -1 y el otro 2.*

	C=No T	*D=T*
C=No T	*1,1*	*-1,2*
D=T	*2,-1*	*0,0*

La mejor elección para cada sospecho es elegir D.

1.2 Equilibrio de Nash

El siguiente ejemplo muestra que el proceso de eliminación no siempre produce una solución.

Ejemplo 7 *Consideremos el juego definido por las siguientes matrices, ninguna de ellas se pueden eliminar por el proceso de eliminación de estrategias dominadas*

	H	*T*
H	*1,-1*	*-1,1*
T	*-1,1*	*1,-1*

Definición 4 *Una estrategia mixta σ^* es un equilibrio de Nash si para cada $i \in N$, y para cada $s_i \in S_i$*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*).$$

En forma similar, podemos definir equilibrio de Nash para una estrategia pura s^* .

Para el jugador i denotamos por σ_{-i} una estrategia de los otros jugadores.

Dada σ_{-i} queremos saber cuál o cuáles son las estrategias del jugador i que son mejores respuestas (best response) contra σ_{-i},

$$B_i(\sigma_{-i}) = \{s_i^* \in S_i : u_i(s_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \text{ para cada } s_i \in S_i\}$$

B_i, se la conoce como función de mejor respuesta.

Lema 2 *Si $s_i^*, s_i' \in B_i(\sigma_{-i})$, entonces para cada $0 \leq t \leq 1$, $ts_i^* + (1-t)s_i' \in B_i(\sigma_{-i})$.*

Este Lema dice que dadas dos estrategias puras que son mejor respuesta para σ_{-i}, entonces cualquier estrategia mixta que es combinación convexa de ellas también lo son.

Lema 3 *σ^* es un equilibrio de Nash si y sólo si para cada i, $\sigma_i^* \in B_i(\sigma_{-i}^*)$.*

Lema 4 *Cuando cada jugador hace una sóla eliminación de estrategías dominadas estrictamente y produce una única estrategia s^*. Entonces s^* es un equilibrio de Nash.*

Ejemplo 8 *(Dilema del Prisionero) Único equilibrio de Nash*

	C	*D*
C	*1,1*	*-1,2*
D	*2,-1*	$\boxed{\textbf{0,0}}$

Ejemplo 9 *(Matching Pennies) No existe equilibrio de Nash en estrategia pura pero si en estrategia mixta.*

	H	*T*
H	*1,-1*	*-1,1*
T	*-1,1*	*1,-1*

Supongamos que el jugador 2 juega $\sigma_2 = (\sigma_2(H), \sigma_2(T))$, debido a que $\sigma_2(H) + \sigma_2(T) = 1$, podemos considerar que $\sigma_2 = (y, 1-y)$. Similarmente consideramos que el jugador 1 juega $\sigma_1 = (x, 1-x)$ entonces el jugador 1 debe maximizar

$$\begin{aligned} A\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y - 1(1-y) \\ -y + 1 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2y \\ 1-2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si el jugador 2 elige y de tal forma que

$$-1 + 2y > 1 - 2y$$

o equivalentemente $\sigma_2(H) = y > 1/2$, entonces el jugador 1 debe elegir

$$\sigma_1^* = (1, 0).$$

y el jugador 2 debe elegir $\sigma_2^*(H) = 0 = y^*$, ésto contradice que $y > 1/2$. En forma similar se llega a una contradicción si el jugador 2 elige y de tal forma que

$$-1 + 2y < 1 - 2y.$$

Por lo tanto, el jugador 2 debe elegir y de tal forma que

$$-1 + 2y = 1 - 2y$$

o equivalentemente $\sigma_2(H) = y = 1/2$*, entonces el jugador 1 elige* x *que maximize*

$$A\sigma_2 = \begin{pmatrix} -1+2y \\ 1-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Esto dice que cualquier valor que satisfaga $0 \leq x \leq 1$*, maximiza el pago del jugador 1. Pero si el jugador 1 elige* $x \neq 1/2$ *lleva a que el jugador 2 elija* $y^* \neq 1/2$*, entonces la mejor elección del jugador 1 es* $x^* = 1/2$*.*

$$\sigma_1^* = (1/2, 1/2).$$

Por lo tanto el Equilibrio de Nash (único) es $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/2, 1/2)$*.*

Ejemplo 10 *(Batalla de los sexos) Múltiples equilibrios. La historia de este juego es que una pareja quiere ir al Ballet o al Fútbol*

	B	*F*
B	*0,0*	$\boxed{\textbf{2,1}}$
F	$\boxed{\textbf{1,2}}$	*0,0*

También $\sigma_1^* = (2/3, 1/3)$ *y* $\sigma_2^* = (1/3, 2/3)$ *es un Equilibrio de Nash*

Ejemplo 11 *(Juego del Halcón (H) y la Paloma (D) o Juego de la gallina). La historia del juego de la gallina es que hay un puente de solamente una mano y dos conductores quieren cruzarlo, los jugadores pueden tener actitud agresiva (H) o pasiva (D). La historia del Halcón y la Paloma que se usa en biología, es que dos especies luchan por el medio ambiente.*

	H	*D*
H	*-1,-1*	$\boxed{\textbf{2,1}}$
D	$\boxed{\textbf{1,2}}$	*0,0*

También $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/2, 1/2)$*, es un Equilibrio de Nash.*

1.2.1 Existencia de Equilibrio de Nash

Teorema 1 *(Nash 1950) Cada juego finito en forma normal tiene un equilibrio de Nash en estrategia mixta.*

Demostración. Considerar *la función de reacción o de mejor respuesta:* para cada $i \in N$ y para cada $\sigma \in \sum$

$$r_i(\sigma) = \max_{\sigma_i' \in \sum_i} \{u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})\}.$$

Luego se prueba que si $\sigma \in r(\sigma)$, entonces σ es un equilibrio de Nash.
Teorema de Punto fijo de Kakutani. La aplicación $r : \sum \to \sum$ tiene un punto fijo si

1. $\sum$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, compacto y convexo.
2. Para cada $\sigma \in \sum, r(\sigma) \neq \emptyset$.
3. Para cada $\sigma \in \sum, r(\sigma)$, es convexa.
4. $r(\cdot)$ tiene gráfico cerrado o es semi-continua superiormente:

$$(\sigma^*, \delta^*) \to (\sigma, \delta), \text{ con } \delta^* \in r(\sigma^*) \text{ entonces } \delta \in r(\sigma).$$

1.2.2 Modelo de oligopolio, Nash en perspectiva,

El ejemplo siguiente muestra el cálculo del Equilibrio de Nash en Estratégia Pura para un juego infinito.

Ejemplo 12 *(Cournot) Es un duopolio que produce un bien y que deben vender a un precio de mercado, es decir, son empresas que simultáneamente eligen sus niveles de producción. Las estrategias de cada empresa son cantidades* $q_i \in Q_i = [0, \infty)$. *El precio de venta es una función de las producciones* $p(q)$ *donde* $q = q_1 + q_2$, *el costo de producción es* $c(q_i)$, *y su beneficio es*

$$u_i(q_1, q_2) = q_i p(q) - c_i(q_i).$$

Este juego está definido por Q_i, *y por* u_i. *Las funciones de reacción de Cournot*

$$r_1 : Q_2 \to Q_1 \text{ y } r_2 : Q_1 \to Q_2$$

especifican a cada firma la elección óptima para un nivel dado del oponente. Bajo ciertas condiciones de $p(q)$ *y de* c_i, *podemos resolver las* r_i.

$$\frac{\partial u_2}{q_2} = p(q_1 + q_2) + p'(q_1 + q_2) q_2 - c_i'(q_2).$$

Como la función de reacción es óptima debe satisfacer

$$p(q_1 + r_2(q_1)) + p'(q_1 + r_2(q_1)) r_2(q_1) - c_i'(r_2(q_1)) = 0.$$

Si la función $p(q) = \max\{0, 1 - q\}$ *y* $c_i(q_i) = cq_i$, *se tiene*

$$1 - (q_1 + r_2(q_1)) - r_2(q_1) - c = 0.$$

Despejando $r_2(q_1)$ *se obtiene*

$$r_2(q_1) = (1 - q_1 - c)/2.$$

En forma similar para $r_1(q_2)$

$$r_1(q_2) = (1 - q_2 - c)/2.$$

El equilibrio de Nash (q_1^*, q_2^*), *satisface*

$$q_2^* = r_2(q_1^*) \text{ y } q_1^* = r_1(q_2^*)$$

Es decir que

$$q_2^* = r_2(r_1(q_2^*)) \text{ y } q_1^* = r_1(r_2(q_1^*))$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} q_2^* &= r_2(r_1(q_2^*)) = \frac{1 - \frac{1-q_2^*-c}{2} - c}{2} \\ &= \frac{2 - 1 + q_2^* + c - 2c}{4} = \frac{1 + q_2^* - c}{4} \end{aligned}$$

Despejando q_2^*

$$q_2^* = (1 - c)/3,$$

simétricamente

$$q_1^* = (1 - c)/3.$$

El pago que obtiene cada empresa es

$$\begin{aligned} u_i(q_1^*, q_2^*) &= q_i^* p(q^*) - c(q_i^*) = \frac{1-c}{3}\left(1 - \frac{1-c}{3} - \frac{1-c}{3}\right) - c\frac{1-c}{3} \\ &= \left(\frac{1-c}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

En el Modelo de Oligopolio de Cournot (1838) y de Bertrand (1883) donde las firmas eligen simultáneamente el precio y deben producir suficiente cantidad para cumplir con la demanda después de la elección del precio.

En estos dos modelos el equilibrio es determinado por la condición que las firmas la acción es la mejor respuesta a la jugada anticipada por sus oponentes. Los equilibro de Cournot y de Bertran son los Equilibrios de Nash.

Los Equilibrios de Nash son predicciones de como el juego será jugado, en el sentido que si todos los jugadores predicen un particular equilibrio de Nash , entonces ningún jugador tiene incentivo a jugar en forma diferente.

Así un Equilibrio de Nash tiene la propiedad que los jugadores pueden predecirlo y predecir que sus oponentes lo predicen y así siguiendo. En contraste, en una predicción de una estrategia que no es Equilibrio de Nash entonces hay al menos un jugador que ”cometerá un error” pues las predicciones no coincidirán con la jugada.

2 Juegos en forma extensiva

Esta representación es la forma más rica para describir un juego, ya que modela situaciones dinámicas.

Los juegos en forma extensiva hacen explícito el orden en el cual los jugadores mueven y cada jugador conoce cuando realizar cada una de sus decisiones. En este sentido las estrategias corresponden a un plan de contingencias en lugar de acciones sin contingencias.

Un juego en forma extensiva puede ser visto como una generalización de un multi-jugador de un árbol de decisión.

Consideremos el siguiente juego:

Equilibrio de Stackelberg de un duopolio.

Como el modelo de Cournot las acciones de la firma es elegir el nivel de producción q_i.

Supongamos que el jugador 1 es el *lider de Stackelberg*, es decir elige q_1, el jugador 2 *observa* q_1, antes de elegir su q_2.

Supongamos que la *produción* es sin costo y que la demanda es lineal con $p(q) = 12 - q$, y el pago del jugador i es:

$$u_i(q_1, q_2) = (12 - (q_1 + q_2))\, q_i.$$

¿Como extender la idea de *Equilibrio de Nash?*

¿Como esperamos que jueguen los jugadores?

A diferencia del modelo de producción de Cournot (ambos jugadores elegían simultáneamente) en este modelo el *jugador 1* elige *primero* (no condiciona su producción q_1) y después elige el jugador *2*, por lo que su elección q_2 depende de la hecha por el jugador *1*.

Por lo tanto es natural que las estrategias del *jugador 2* deben ser una función:

$$s_2 : Q_1 \longrightarrow Q_2$$

Q_1 es el *espacio de acciones factibles* del *jugador 1*.

Dado un perfil de estrategia (pura), el resultado es un vector de salida $(q_1, s_2(q_1))$ y el pago $u_i\,(q_1, s_2(q_1))$.

Definimos un equilibrio de Nash como un perfil de preferencias tal que ningún jugador puede ganar si cambia su estrategia.

Calculemos los Equilibrios de Nash.

Primero: *equilibrio de Stackelberg*

El *jugador 2* eligirá una estrategia s_2 tal que para cada q_1, el nivel de producción q_2 resuelva la ecuación:

$$\max_{q_2'}\; u_2\,(q_1, q_2') = (12 - (q_1 + q_2'))\, q_2'$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2\left(q_1,q_2'\right)}{\partial q_2'} &= \frac{\partial\left(12-\left(q_1+q_2'\right)\right)q_2'}{\partial q_2'}\\ &= 12-(q_1+2q_2')\end{aligned}$$

$$12-(q_1+2q_2')=0$$

$$r_2(q_1)=q_2'=6-\frac{q_1}{2}$$

El *jugador 1* maximizará su elección cuando el *jugador 2* elija $s_2=r_2$

$$\max_{q_1}\ u_1\left(q_1,r_2(q_1)\right)=\left(12-\left(q_1+6-\frac{q_1}{2}\right)\right)q_1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(q_1,r_2(q_1))}{\partial q_1} &= \frac{\partial\left(12-\left(q_1+6-\frac{q_1}{2}\right)\right)q_1}{\partial q_1}\\ &= 12-(2q_1+6-q_1)\end{aligned}$$

$$-q_1+6=0$$

El equilibrio de Stackelberg y el pago son:

$$q_1^*=6 \qquad r_2(q_1^*)=6-\tfrac{6}{2}=3.$$

$$u_1(6,3)=18 \qquad u_2(6,3)=9.$$

Equilibrio de Cournot (cuando ambos jugadores eligen simultáneamente)

Consideremos la siguiente estrategia y probemos que es un Equilibrio de Nash , y $s_2(q_1)=q_2^C=4$, para toda q_1.

$$\begin{aligned}q_1^C &= 4,\\ s_2(q_1) &= q_2^C=4,\ \forall q_1.\end{aligned}$$

Jugador 1: maximizará su elección cuando el *jugador 2* elija $q_2^C=4$

$$\max_{q_1}\ u_1\left(q_1,q_2^C\right)=\left(12-(q_1+4)\right)q_1$$

$$\begin{aligned}\frac{du_1(q_1,4)}{dq_1} &= \frac{d(8-q_1)q_1}{dq_1}\\ &= 8-2q_1\end{aligned}$$

$$8-2q_1=0$$

$$q_1=4=q_1^C$$

Jugador 2: maximizará su elección cuando el *jugador 1* elija $q_1^C=4$

$$\max_{q_2}\ u_1\left(q_1^C,q_2\right)=\left(12-(q_2+4)\right)q_2$$

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1(q_2,4)}{dq_2} &= \frac{d(8-q_1)q_2}{dq_2} \\
&= 8-2q_2
\end{aligned}
$$

$$8-2q_2=0$$

$$q_2=4=q_2^C$$

Equilibrio de Cournot y su pago:

$$q_1^C=4 \qquad s_2(q_1)=q_2^C=4,\ \forall q_1$$

$$u_1(4,4)=16 \qquad u_2(4,4)=16.$$

Comparemos los dos equilibrios:
Equilibrio de Stackelberg y su pago:

$$q_1^*=6 \qquad r_2(q_1^*)=6-\tfrac{6}{2}=3.$$

$$u_1(6,3)=18 \qquad u_2(6,3)=9.$$

Equilibrio de Cournot y su pago:

$$q_1^C=4 \qquad s_2(q_1)=q_2^C=4,\ \forall q_1$$

$$u_1(4,4)=16 \qquad u_2(4,4)=16.$$

En el Equilibrio de Cournot el *jugador 2* declara la siguiente estrategia *"Independientemente de lo que elija el jugador 1, elegiré* $q_2^C=4$"

Por esta amenaza el *jugador 1* podría pensar que si elige $q_1=6$ y si el *jugador 2* es *racional,* éste debería responder con $q_2=3$ en lugar de $q_2=4$, ya que el *jugador 2 conoce la elección del jugador 1 antes de hacer su elección.*

3 Juegos Multiple-estados con Acciones Observadas

Juegos Multiple-estados con Acciones Observadas es:

1. Todos los jugadores en la etapa k, eligen cada uno sus respectivas acciones conociendo las elegidas por todos en los estados previos, $0,1,...,k-1$.

2. Todos los jugadores mueven simultáneamente en la etapa k, es decir, cada jugador elige su o sus acciones sin conocer las acciones de los otros en la etapa k.

- Equilibrio de Stackelberg movidas alternativas.
- Cournot juegos en forma normal *1-etapa.*

Descripción del Juego

- Etapa 0. Todos los jugadores $i \in N$, eligen simultáneamente su acción de un conjunto $A_i(h^0)$. Algunos conjuntos de acciones pueden ser *"no hacer nada".* $h^0 = \emptyset$, denota la *historia.* Al final de la etapa los jugadores observan
$$a^0 = (a_1^0, ..., a_N^0)$$
- Etapa 1. Los jugadores conocen la historia $h^1 \equiv a^0$, dada $h^0 = \emptyset$. $A_i(h^1)$ denota el conjunto de acciones posibles dada h^1.
- Continua. h^{k+1} la historia al final de la etapa k.
$$h^{k+1} = \left(a^0, ..., a^k, \right)$$
$A_i(h^{k+1})$ denota el conjunto de acciones posibles dada h^{k+1}.

$K + 1$ denota el número total de etapas del juego.
$K = \infty$ denota número infinito de etapas del juego.
h^∞, historia infinita
h^{K+1} describe una sucesión entera de acciones.
H^{K+1}, el conjunto de todas las *historias terminales*, o conjunto de todos los resultados posibles.

Una estrategia para el jugador i es un plan de contingencia de como jugar en cada etapa k para la posible historia h^k. Si H^k denota el conjunto de todas las $k-$historias. Sea $A_i\left(H^K\right) = \cup_{h^k \in H^K} A_i\left(h^k\right)$ el conjunto de acciones del jugador $i - \acute{e}simo$, una estrategia pura de dicho jugador es una sucesión de aplicaciones $\left\{s_i^k\right\}_{k=0}^K$, tal que $s_i^k : H^k \to A_i\left(H^k\right)$, es decir $s_i^k\left(h^k\right) \in A_i\left(h^k\right)$.

Veamos como se genera una historia h^k.
Etapa 0. $h^0 = \emptyset$, $a^0 = \left(s^0\left(h^0\right)\right)$.
Etapa 1. $h^1 = a^0$, $a^1 = \left(s^1\left(h^1\right)\right) = \left(s^1\left(a^0\right)\right)$.
Etapa 2. $h^2 = \left(a^0, a^1\right)$, $a^2 = \left(s^2\left(h^2\right)\right) = \left(s^1\left(a^0, a^1\right)\right)$.
s denotará (abuso de notación) una estrategia o toda la historia
$u(s)$ representará un vector de pago.

Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategia s tal que ningún jugador i, puede obtener un mejor pago cambiando la estrategia s_i, es decir para cada i, y para toda s_i'
$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}).$$

3.1 Inducción hacia atrás y equilibrio de subjuego perfecto

En el juego de Stackelberg primero eligió el jugador 2 y luego el jugador 1, este mecanismo se puede extender cuando un sólo jugador mueve o elige una acción, se lo conoce como *Inducción hacia atrás.*

Un juego de múltiples etapas tiene *información perfecta* si para cada etapa k e historia h^k, sólo *un jugador* tiene *una elección no trivial.*

El jugador que elige en la etapa k, está *perfectamente informado* de todas las acciones tomadas o historia h^k.

Ejemplos, movidas alternativas.

Inducción hacia atrás puede ser aplicado a cualquier *juego finito con información perfecta.*

Juego finito es cuando en cualquier etapa k del juego hay un número finito de acciones.

Algoritmo de Inducción hacia atrás

Etapa 1. En la etapa k, determinar una elección óptima para cada historia h^K. Si hay más de una el jugador elige cualquiera

Etapa 2. En la etapa $K-1$, determinar la acción óptima para cualquier historia h^K, donde está fija la elección del nodo K, de la acción elegida en la etapa 1.

Etapa 3. Repetir

El perfil de estrategia construído con el Algoritmo de Inducción hacia atrás es un Equilibrio de Nash, ya que ningún jugador tiene incentivo a no elegir su acción óptima.

Algunas contras:

- En un juego de *2-etapas*, el jugador 1 debe pronosticar sobre el jugador 2,
- En un juego de *3-etapas*, el jugador 2 debe pronosticar sobre el jugador 3, y el jugador 1 debe pronosticar sobre la elección del jugador 2, *el jugador 1 debe estar seguro que el jugador 2 lo hace bien, es decir que elige óptimamente.*

Ejemplo

Etapa 1. La Firma 1 debe decidir si comprar o no una nueva tecnología para reducir costo.

Etapa 2. La Firma 2 observa la acción de la Firma 1. Las dos Firmas eligen el nivel de producción simultáneamente, como una *competencia de Cournot.*

Este juego es de dos etapas pero no es de Información Perfecta, ya que en la etapa 2 ninguna firma usa la acción trivial.

La pregunta es: ¿Cómo debe pronosticar la Firma 1 la acción de la Firma 2 en la etapa 2?

El análisis de equilibrio dice que *una conjetura natural es que en la etapa 2 elija un Equilibrio de Cournot para la prevalencia de la estructura del costo de la industria.*

Cada h^1 genera movidas simultáneas entre las dos Firmas, la Firma 1 pronostica que jugada en este juego corresponderá a un equilibrio para el pago bajo h^1.

Ésta es la idea de *Equilibrio de subjuego perfecto.*

Preliminares para la Definición de equilibrio de subjuego perfecto

Todos los jugadores conocen h^k, en la etapa k.

Dado h^k, denotamos con $G(h^k)$ un juego que comienza con la historia h^k. Las acciones son $a^k, ..., a^K$, la historia final $h^{K+1} = \left(h^k, a^k, ..., a^K\right)$, y el pago será $u_i\left(h^{K+1}\right)$. Las estrategias en $G\left(h^k\right)$ son definidas como aplicaciones del conjunto de historias en acciones, donde sólo consideraremos aquellas historias consistentes con h^k, así podemos extender el concepto de Equilibrio de Nash al juego $G\left(h^k\right)$.

$G\left(h^0\right)$ denota el juego original.

Cada estrategia s de todo el juego, induce un perfil de estrategia $s|h^k$ sobre cualquier $G\left(h^k\right)$, si para cada jugador i, $s_i|h^k$ es consistente con h^k.

Definición 5 *Un perfil de estrategia s de un juego de múltiple etapas con acciones observadas es un equilibrio de subjuego perfecto si, para cada h^k, $s|h^k$ a $G\left(h^k\right)$ es un Equilibrio de Nash de $G\left(h^k\right)$.*

Equilibrio de subjuego perfecto implica Equilibrio de Nash.

Equilibrio de Subjuego perfecto es igual a Inducción hacia atrás si el juego es de Información Perfecta.

3.2 Juegos en Forma Extensiva

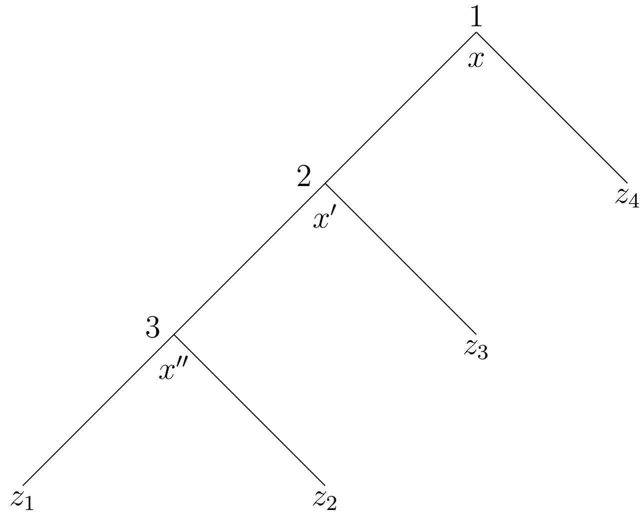
Definición 6 *Un juego en forma extensiva contiene la información siguiente:*

1. *N, Conjunto de jugadores*
2. *El Árbol del juego, cuyos nodos indican el orden de movidas de los jugadores y las ramas las acciones que puede elegir los jugadores.*
3. *El pago de los jugadores que es función de las movidas que se hicieron.*

4. Lo que conocen los jugadores cuando hacen su elección.

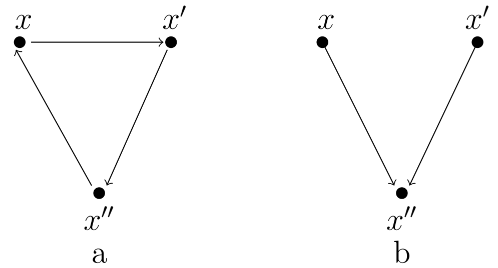
5. Una distribución de probabilidad sobre cualquier evento exógeno. Movimiento de la Naturaleza.

Un árbol es una colección de nodos ordenados $x \in X$, con *una relación de precedencia* " $\succ$ ", $x \succ x'$ "x está antes que x'". La figura siguiente muestra un árbol



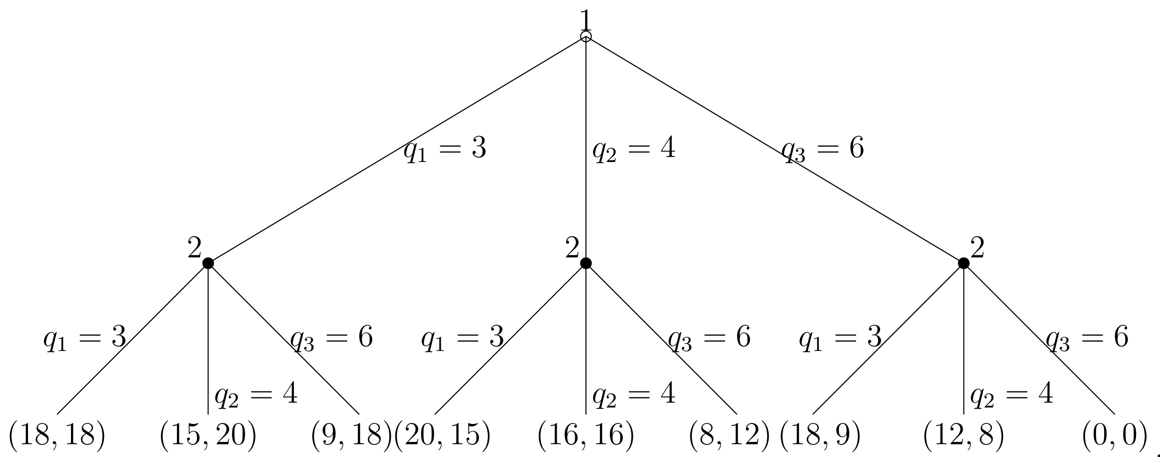
La relación de precedencia satisface

- Transitiva $x \succ x'$ y $x' \succ x''$, entonces $x \succ x''$.
- Asimétrica $x \succ x'$ entonces $x' \not\succ x$
- Absorbente $x \succ x'$ y $x'' \succ x'$, entonces $x \succ x''$ o $x'' \succ x$. Esta propiedad asegura que cada nodo tiene un único predecesor. Esto asegura que hay un sólo camino en el árbol que dá a cada nodo una descripción completa del camino que lo precede. La figura siguiente muestra relaciones no transitivas y no absorbentes.

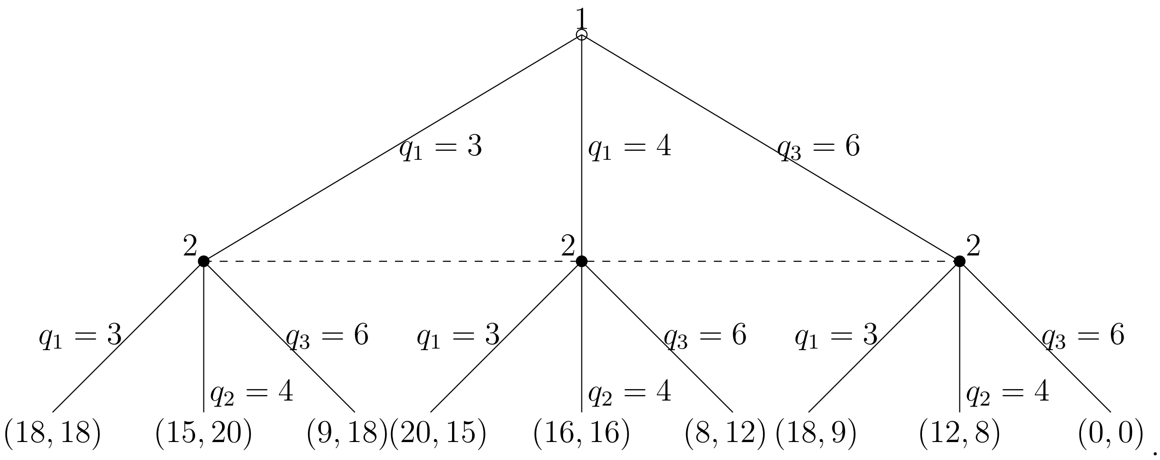


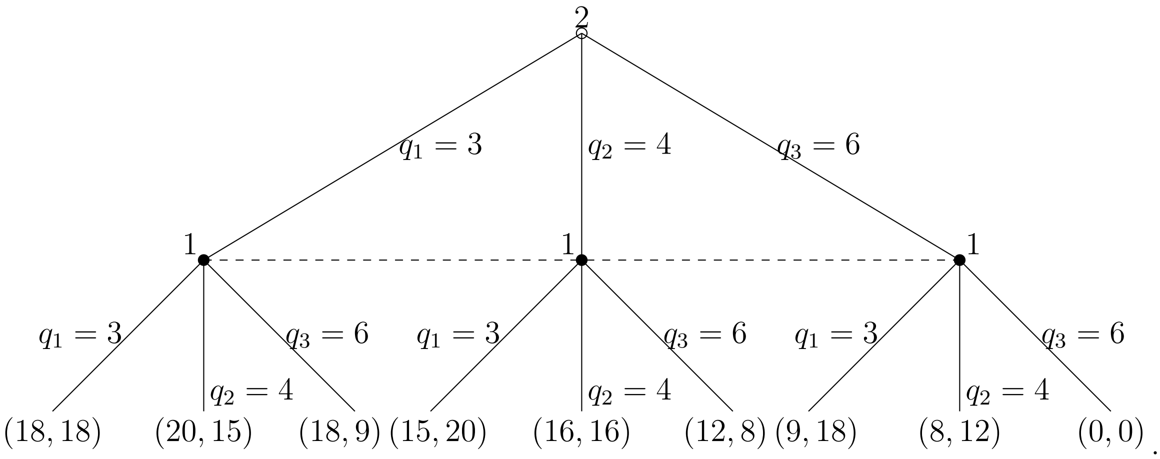
- Z denota el conjunto de *nodos terminales,* y son aquellos que no son predecesores de ningún nodo, o no tienen ningún siguiente.
- Si z es un nodo terminal, describe exactamente un camino en el árbol, así que asignamos una sucesión de movidas y $u_i : Z \to \mathbb{R}$, es la función de pago.
- $i : X \backslash Z \to N$, denota al jugador que mueve en cada nodo no terminal.
- $i(x)$ tiene $A(x)$ acciones en cada nodo x.
- H denota el conjunto de información, es una partición de los Nodos no terminales del árbol. $h \in H$, y $h(x)$ denota al conjunto que contiene al nodo x.
  - $x' \in h(x)$ entonces $A(x') = A(x)$.
  - Si para cada $x \in X$, $|h(x)| = 1$, el juego es de información perfecta.

El ejemplo siguiente muestra un juego extensivo con información perfecta. Es el modelo de Stackelberg con tres niveles de producción.



Los siguientes ejemplos son de informción incompleta, las lineas de punto indica el conjunto de información del jugador 2. Corresponde al modelo de Cournot, de movidas simultaneas, con tres niveles de producción.





3.3 Estrategias de Comportamiento y Pagos en Juegos Extensivos

Para cada jugador i denotamos:

- H_i es el conjunto de información.
- $A_i = \bigcup\limits_{h_i \in H_i} A(h_i)$ es el conjunto de todas las acciones.
- $s_i : H_i \to A_i$ es una estrategia pura para el jugador i, donde $s_i(h_i) \in A(h_i)$ para cada $h_i \in H_i$.
- S_i es el espacio de estrategias puras. Como cada estrategia pura es una aplicación del conjunto de informaciones a las acciones, podemos

escribir S_i como el producto de los espacios de acciones de cada h_i a $S_i = \prod_{h_i \in H_i} A(h_i)$.

En el ejemplo de Stacklberg el jugador 1 tiene un conjunto de información y tres acciones, así el tiene tres estrategias puras. El jugador 2 tiene tres conjuntos de información correspondientes a las tres posibles acciones del jugador 1y para cada acción de éste tiene tres posibles acciones en cada conjunto de información. Por lo tanto el jugador 2 tiene 27 estrategias puras. En general, el número de estrategias puras del jugador i,

$$|S_i| = \left| \prod_{h_i \in H_i} A(h_i) \right|$$

Dada una estrategia pura para cada jugador y la distribución de probabilidad de la movida de la naturaleza podemos computar una distribución de probabilidad sobre los resultados y así asignar un pago esperado $u_i(s)$, para perfil de estrategia s . Los conjuntos de información que son alcanzados con probabilidad positiva bajo el perfil s son llamados el camino de s.

Definición 7 *Una estrategia pura s^* es un equilibrio de Nash para el juego en forma extensiva, si s_i^* para cada jugador, maximiza su pago esperado dada la estrategia s_{-i}^* de sus oponentes.*

Notemos que en la definición de equilibrio de Nash las estrategias de los oponentes de i están fijas al testear cuando él desea desviarse, ésto es similar al caso de que los jugadores elijan sus estrategias simultáneamente. Ésto no significa que en el equilibrio de Nash los jugadores elijan sus acciones simultáneamente. Por ejemplo, si el jugador 2 fija su estrategia en el juego de Stacklberg como la función de reacción de Cournot $\widehat{s}_2 = (4, 4, 3)$, entonces cuando el jugador 1 es amenazado por la estrategia del jugador 2 , él no presume que la acción del jugador 2 es no afectada por sí misma, pero además el jugador 2 responderá a la acción del jugador 1 por la forma $\widehat{s}_2$.

El equilibrio de Stacklberg de este juego es $q_1 = 6$, $q_2 = 3$ y el equilibrio de Nash es $s_1 = 6$ y $s_2 = \widehat{s}_2$.

El resultado de Cournot es $(4, 4)$ y el equilibrio de Nash es $s_1 = 4$, y $s_2 = (4, 4, 4)$.

Definición 8 *Sea $\Delta(A(h_i))$ la distribución de probabilidad sobre $A(h_i)$. Una estrategia de comportamiento para el jugador i, denotada por h_i, es un elemento del producto cartesiano $\prod_{h_i \in H_i} \Delta(A(h_i))$.*

Una estrategia de comportamiento da una distribución de probabilidad sobre las acciones en cada h_i , y la distribución de probabilidad en diferentes de conjuntos de información son independientes.

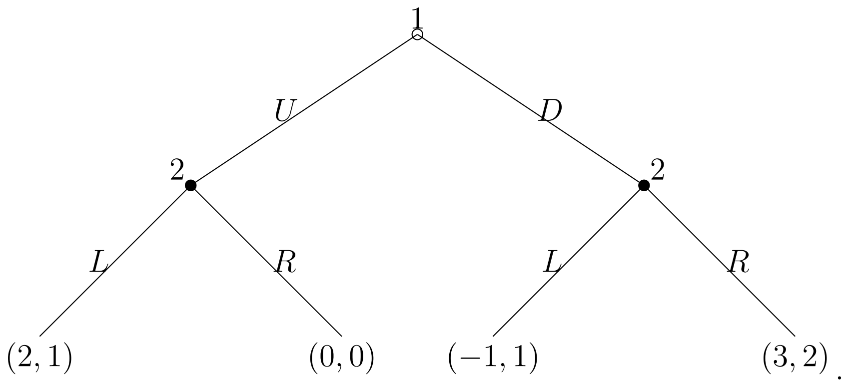
Una estrategia pura es un ejemplo de una estrategia de comportamiento donde la distribución de probabilidad en cada conjunto de información es degenerada.

Un perfil $b = (b_1, ..., b_n)$ de estrategia de comportamiento genera una distribución de probabilidad sobre los resultados, y asigna un pago esperado a cada jugador.

Definición 9 *Un equilibrio de Nash en una estrategia de comportamiento es tal que ningún jugador puede mejorar su pago por usar otra estrategia de comportamiento.*

3.4 Representación estratégica de juegos extensivos

Para definir un juego en forma estratégica a partir de uno de forma extensiva, simplemente asociaremos a las estrategias puras $s \in S$ y a los pagos $u_i(s)$ del juego normal a los definidos exactamente por la forma extensiva. Una forma diferente de decir ésto, es que la misma estrategia pura puede ser interpretada tanto como en el juego extensivo como en el juego normal.



	(L,L)	(L,R)	(R,L)	(R,R)
U	2,1	2,1	0,0	0,0
D	-1,1	3,2	-1,1	3,2

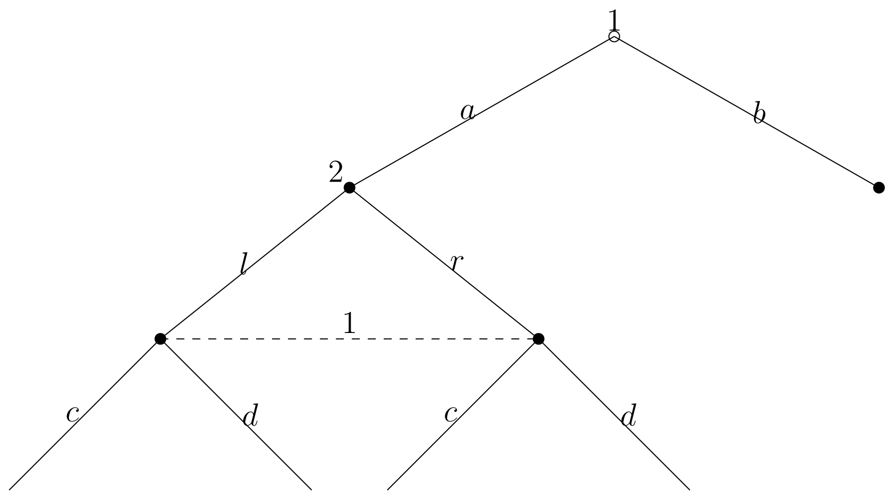
Forma Estratégica

La interpretación de la forma extensiva, es que el jugador i quiere que h_i sea alcanzado antes de decidir como jugar allí; con la interpretación de la forma estratégica, él hace un plan completo.

En el ejemplo de Stacklberg ordenaremos el conjunto de información del jugador 2 de izquierda a derecha, así la estrategia $\widehat{s}_2 = (4, 4, 3)$ significa que jugará 4 en respuesta a $q_1 = 3$, jugará 4 en respuesta a 4 y jugará 3 en respuesta a 6.

Definición 10 *Dos estrategias puras s_i y s_i' son equivalentes si ellas producen la misma distribución de probabilidades sobre los resultados para todas las estrategias puras de sus oponentes.*

Consideremos el ejemplo en la siguiente figura. El jugador 1 tiene cuatro estrategias puras: (a, c), (a, d), (b, c) y (b, d). Sin embargo, si el jugador 1 juega b, su segundo conjunto de información nunca es alcanzado, y las estrategias (b, c) y (b, d) son equivalentes.



Definición 11 *La forma estratégica reducida (o forma normal reducida) de un juego extensivo se obtiene por identificar estrategias puras equivalentes, es decir que se eliminan todas las estratégias equivalentes salvo una.*

Como la forma extensiva y la estratégica tienen las mismas estrategias puras, podemos definir las estrategias mixtas como una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras del juego en forma estratégica reducida, mientras que son diferentes los conjuntos de estrategias mixtas y de comportamientos.

Teorema 2 *(Kuhn 1953) En un juego con memória perfecta las estratégias mixtas y de comportamiento son equivalentes. Más precisamente: Cada estrategia mixta es equivalente a una única estrategia de comportamiento que la genera, y cada estrategia de comportamiento es equivalente a cada estrategia mixta que la genera.*

3.5 Estrategias estrictamente dominadas y Equilibrio de Nash

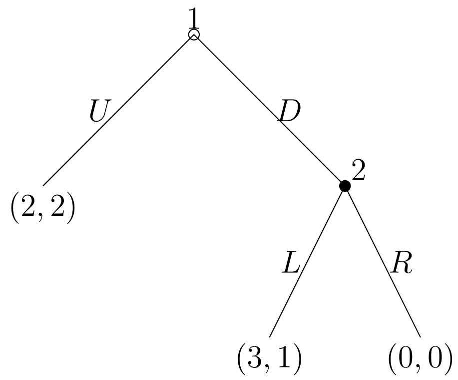
En un juego extensivo finito, la correspondencia entre forma estratégica y Teorema de existencia de Nash, asegura que existe una estrategia mixta de equilibrio.

Teorema 3 *(Zermelo 1913; Kuhn 1953) Un juego finito de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategia pura.*

3.6 Inducción hacia atrás y equilibrio de subjuego perfecto

Como hemos visto la forma estratégica puede ser usada para representar juegos en forma extensiva, con las estrategias de la forma estratégica haciendo planes completos de acción en los juegos extensivos. Así, el concepto de equilibrio de Nash puede ser aplicado a todos los juegos, no solamente para juegos donde los jugadores eligen sus acciones simultáneamente.

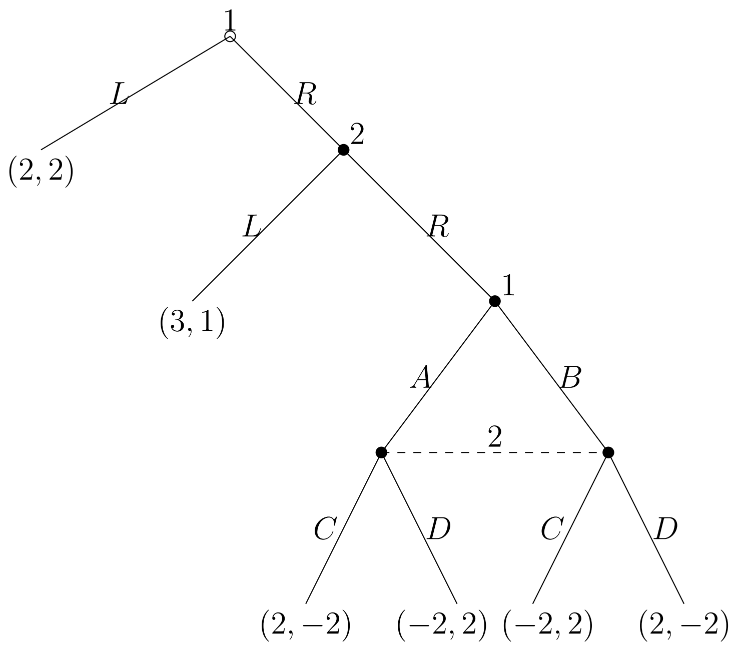
Selten (1965) fue el primero en argumentar que en general algunos equilibrios de Nash son más razonables que otros. Consideremos el ejemplo siguiente:



	L	R
U	2,2	2,2
D	3,1	0,0

Es un juego finito de información perfecta y la solución de inducción hacia atrás es que el jugador 2 juegue L si su conjunto de información es alcanzado, y así el jugador 1 debe jugador D. La inspección de la forma estratégica correspondiente a este juego muestra que hay otro equilibrio de Nash, donde el jugador 1 juega U y el jugador 2 juega R. El perfil (U,R) es un equilibrio de Nash porque dado que el jugador 1 juega U, el conjunto de información del 2 no es alcanzado y éste no pierde nada por jugar R. Pero Selten argumentó que este equilibrio es sospechoso. Después de todo, si el conjunto de información del jugador 2 es alcanzado, entonces, como el jugador 2 está convencido que sus pagos son como lo especifica la figura, debería jugar L. Y si fuéramos el jugador 2 es como deberíamos jugar. Más aún, si fuéramos el jugador 1, nosotros deberíamos esperar que el jugador 2 juegue L, y así nosotros deberíamos jugar D.

En un lenguaje familiar, el equilibrio (U,R) no es creíble, porque jugar R se basa en una amenaza vacía para el jugador 2 . La amenaza es vacía porque el jugador 2 nunca desearía llevarla a cabo.



Definiremos formalmente este concepto:

Definición 12 *Un subjuego propio G de un juego extensivo T consiste de un único nodo y de todos sus sucesores en T, con la propiedad que si $x' \in G$ y $x'' \in h(x')$ entonces $x'' \in G$. Los conjuntos de información y los pagos del subjuego son inherentes del juego original. Ésto es, x' y x'' están en el mismo conjunto de información en el subjuego si y sólo si ellos están en el mismo conjunto de información del juego original, y la función de pago del subjuego es la restricción de la función de pago del juego original en los nodos terminales del subjuego.*

Definición 13 *Un perfil de estrategia de comportamiento* σ *de un juego en forma extensiva es un equilibrio de subjuego perfecto si la restricción de* σ *a* G *es un equilibrio de Nash de* G *para cada subjuego propio* G.